

Keine Ahnung von ...

Wendepunkten

Datei 41126

Stand: 31. Januar 2023

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Vorwort

Bei sogenannten Kurvendiskussionen untersucht man das Schaubild einer Funktion.

Man will herausfinden, wo die Kurve die x-Achse schneidet, wo also ihre Nullstellen sind.

Dann ermittelt man Hoch- und Tiefpunkte, und auch Wendepunkte, in denen die Kurve von Linkskrümung zu Rechtskrümung wechselt – oder umgekehrt.

Es gibt mehrere Arten von Wendepunkten. Zwei beschreibe ich hier.

Die „Standardwendepunkte“ findet man durch Lösen der Gleichung $f''(x) = 0$ mit einer anschließenden Kontrolle, die mit der 3. Ableitung geschieht. Das ist der wichtigste Fall.

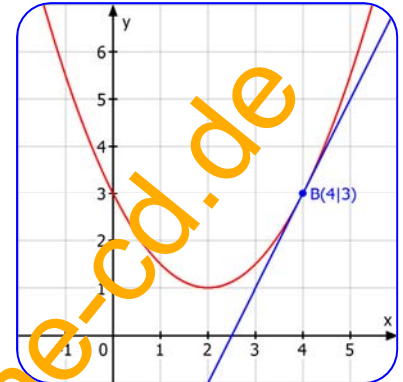
Dann gibt es spezielle Wendepunkte, bei denen die 2. und 3. und 4. Ableitungen Null sind. Diese Exoten werden im Unterricht eigentlich nicht behandelt. Wir lassen sie hier weg.

Die dritte Art Wendepunkt sind künstlich dadurch entstanden, dass man die Graphen zweier verschiedener Funktionen an einer Stelle zusammensetzt. Ein Krümmungswechsel an so einer Nahtstelle tritt als Vorzeichenwechsel von f'' an dieser Stelle in Erscheinung. Dazu gibt es hier zwei Beispiele.

1 Die Bedeutung der Ableitungen

In dieser Stunde setze ich voraus, dass du gelernt hast, wie man (die wichtigsten) Funktionen ableitet. Wir müssen jetzt besprechen bzw. wiederholen, wozu man Ableitungsfunktionen braucht.

1.1 In der Regel beginnt man das Thema Ableitung damit, dass man fragt, wie man die **Steigung einer Tangente** berechnen kann. Man lernt dann, dass die Funktionswerte der 1. Ableitungsfunktion Tangentensteigungen sind.



Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ hat die Ableitung $f'(x) = x - 2$.

Wir suchen die Tangente an der Stelle $x = 4$.

Dazu berechnet man den Funktionswert $f(4) = \frac{1}{2} \cdot 16 - 8 + 3 = 3$.

$y_B = 3$ ist dann die y-Koordinate des Berührungspunkts $B(4|3)$.

Dann benötigt man die **Steigung der Tangente**.

Dazu setzt man $x_B = 4$ in die 1. Ableitung ein: $m_T = f'(4) = 4 - 2 = 2$.

Will man dann die **Gleichung der Tangente**, setzt man Punkt und Steigung in die **Punkt-**

Steigungsform ein: $y - y_B = m_T(x - x_B)$ liefert $y - 3 = 2(x - 4)$. Ergebnis: $y = 2x - 5$.

Diese Tangente hat eine positive Steigung, also steigt diese Gerade.

Diese Tangente schmiegt sich in unmittelbarer Umgebung von B eng an die Kurve an. Daher zeigen Kurve und Tangente in einer kleinen Umgebung von 4 dasselbe Verhalten, d. h. wenn die Tangente steigt, dann gilt das (zumindest in einer kleinen Umgebung des Berührungspunkts) auch für die Kurve. Die Kurve ist jedoch das Schaubild der Funktion f . Also kann man sagen:

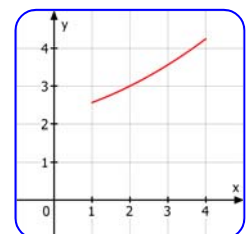
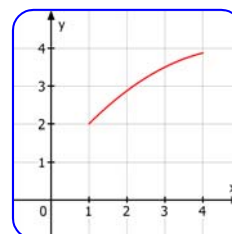
Weil $f'(4) > 0$ ist, nehmen die Funktionswerte in einer Umgebung von 4 zu.

Ergebnis: Die Ableitungsfunktion kann man dazu verwenden, festzustellen, wo die Funktionswerte zunehmen bzw. abnehmen.

1.2 Man kann mit Ableitungen auch ermitteln, **wie sich das Wachstum einer Funktion ändert**.

Beiden Abbildungen zeigen Funktionen, die im Intervall $[1; 4]$ zunehmen. (Man bewegt sich dabei stets in Richtung der positiven x-Achse.)

Dennoch gibt es einen großen Unterschied im Wachstum der beiden Funktionen.



Bei der linken Funktion **nimmt das Wachstum ab** (die Tangentensteigungen nehmen ab), rechts nimmt es zu (die Tangentensteigungen nehmen zu.)

Diese **Wachstumsänderung** der Funktion bedeutet für das Schaubild links: Die Kurve hat **Rechtskrümmung**, und für das Schaubild rechts: Die Kurve hat **Linkskrümmung**.

Dieses Verhalten (Wachstum nimmt ab oder zu) kann man natürlich mathematisch beschreiben. Einige Zeilen weiter oben steht, dass das mit einer Ableitungsfunktion geschehen kann.

Dazu muss man nachdenken: f nimmt in beiden Abbildungen zu.

Nur die Art des Wachstums ist unterschiedlich. Das Wort Krümmung der Kurve ist schon gefallen.

Jetzt muss man nur logisch weiterdenken:

Wenn eine Funktion zunimmt, ist ihre Ableitung dort positiv.

Wenn das Wachstum zunimmt, d. h. wenn die Ableitungsfunktion zunimmt,

dann ist deren Ableitung dort positiv, also $f''(x) > 0$.

Das bedeutet: **Linkskrümmung** für das Schaubild.

Wenn eine Funktion abnimmt, ist ihre Ableitung dort negativ.

Wenn das Wachstum abnimmt, d. h. wenn die Ableitungsfunktion abnimmt,

dann ist deren Ableitung dort negativ, also $f''(x) < 0$.

Das bedeutet: **Rechtskrümmung** für das Schaubild.

Das schauen wir uns an einem Beispiel ausführlich an.

Gegeben ist $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + 1$

Dazu schreibe ich drei Ableitungen an:

$$f'(x) = x^2 - 4x + 1, \quad f''(x) = 2x - 4 \quad \text{und} \quad f'''(x) = 2$$

Damit wir möglichst genau den Verlauf der Kurve kennen, berechne ich die **Extrempunkte**:

$$\text{Notwendige Bedingung: } f'(x) = 0 \quad \text{d. h. } x^2 - 4x + 1 = 0$$

(d. h. Suche nach waagrechten Tangenten.

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ergibt

$$x_E = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \approx \begin{cases} 3,732 \\ 0,268 \end{cases}$$

Information:

Dort findet man also den Hochpunkt $H \approx (0,27 \mid 1,13)$ und den Tiefpunkt $T \approx (3,73 \mid -5,80)$

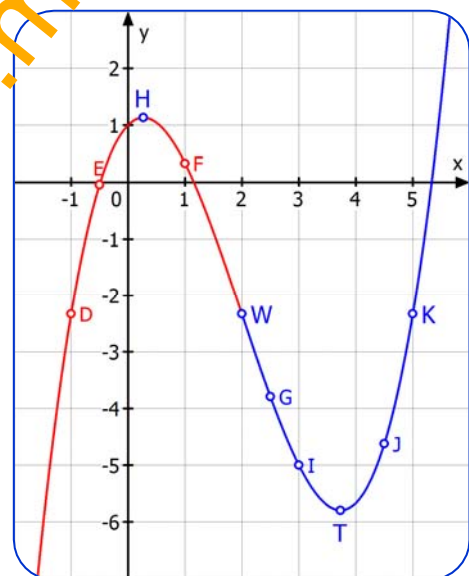
Im Intervall $]-\infty; 0,27[$ nehmen die Funktionswerte von f zu, weil $f'(x) > 0$ ist.

Zwischen H und T , also $0,27 < x < 3,73$ ist $f'(x) < 0$, d.h. die Kurve fällt und die Funktionswerte nehmen ab. Im Intervall $]3,73; \infty[$ steigt die Kurve wieder, nimmt $f(x)$ zu, ist $f'(x) > 0$.

Was uns viel mehr interessiert ist die Art, wie sich die Kurve krümmt.

Ich habe schon vorgearbeitet: Im roten Teil der Kurve hat sie **Rechtskrümmung**, im blauen Teil **Linkskrümmung**. Das ist nun einfach der Anschauung entnommen. Das soll ja auch hier so sein, denn es geht um das Verständnis dieser Dinge.

Ich habe einige Kurvenpunkte eingetragen, zu diesen berechne ich jetzt die Steigungswerte mit $f'(x)$. Man CAS-Rechner schreibt dafür $f1(x)$:



Zuerst berechne ich Steigungen für den roten Kurvenbogen:

In $D(-1|-2,33)$

$f1(-1)$

6

In $E(-0,5|-0,04)$

$f1(-0,5)$

3,250

In $(0|1)$

$f1(0)$

1

In $H(0,268|1,13)$

$f1(0,268)$

-0,000

In $F(1|0,33)$

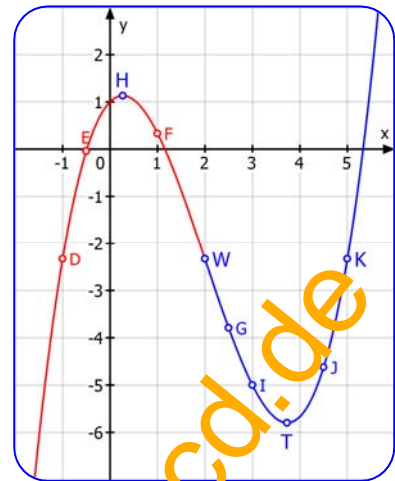
$f1(1)$

-2

In $W(2|-2,33)$

$f1(2)$

-3



Beobachtung: Die Steigungen nehmen bis $x = 2$ ab.

Das ergibt den optischen Eindruck der Rechtskrümmung.

Nun die Steigungen für den blauen Kurvenbogen:

In $W(2|-2,33)$

$f1(2)$

-3

In $G(2,5|-3,79)$

$f1(2,5)$

-2,750

In $I(3|-5)$

$f1(3)$

-2

In $T(3,7321|-5,80)$

$f1(3,7321)$

0,000

In $J(4,5|-4,63)$

$f1(4,5)$

3,250

In $K(5|-2,33)$

$f1(5)$

6

Beobachtung:

Die Steigungen nehmen ab $x = 2$ wieder zu.

Das ergibt den optischen Eindruck der Linkskrümmung.

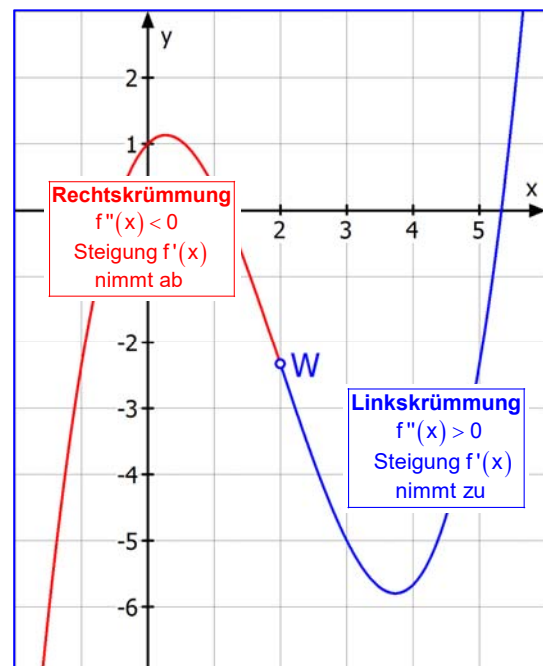
Der Wechsel von Rechtskrümmung nach Linkskrümmung geschieht an der Stelle, an der f'' sein Vorzeichen vom plus nach Minus wechselt. Dort liegt ein **Wendepunkt**.

Ein Wendepunkt liegt auch vor, wenn K dort von Linkskrümmung auf Rechtskrümmung wechselt.

Der Wendepunkt W ist eingezeichnet.

Wenn an einer Stelle die Funktion f'' ihr Vorzeichen von Minus nach Plus wechselt, liegt dort ein „L-Wendepunkt“ (Wechsel von Rechts- nach Linkskrümmung).

Wenn an einer Stelle die Funktion f'' ihr Vorzeichen von Plus nach Minus wechselt, liegt dort ein „R-Wendepunkt“ (Wechsel von Links- nach Rechtskrümmung).



Das waren jetzt mehr Informationen von mir, als eigenes Rechnen. Das war wichtig, damit man zunächst einmal „erlebt“, was an einem Wendepunkt passiert.

Wir wissen nun auch schon, dass man auf der Suche nach Wendepunkten die Stellen suchen muss, an denen die 2. Ableitungsfunktion f'' ihr **Vorzeichen wechselt**.

Dazu gibt es ein mathematisches Verfahren, das ich jetzt zeigen und begründen will:

Unsere Beispielfunktion hat die Gleichung $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + 1$

und diese drei Ableitungen: $f'(x) = x^2 - 4x + 1$, $f''(x) = 2x - 4$ und $f'''(x) = 2$

Wo wechselt $f''(x) = 2x - 4$ das Vorzeichen?

Die Abbildung zeigt die untersuchte Kurve und die schräge gestrichelte Gerade $y = 2x - 4$, die das Schaubild der 2. Ableitungsfunktion f'' ist. Sie wechselt das Vorzeichen im Schnittpunkt mit der x-Achse, also an ihrer Nullstelle:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_W = 2$$

Dass die f'' -Kurve an ihrer Nullstelle die x-Achse auch wirklich schneidet, zeigt ihre Steigung bei $x = 2$. Die Steigung der f'' -Kurve wird mit f''' berechnet:

$$m = f'''(2) = 2$$

Diese Steigungszahl ist ungleich Null, also schneidet die f'' -Kurve die x-Achse, was zu einem Vorzeichenwechsel führt.

Beide Rechnungen sind erforderlich zur Bestimmung eines Wendepunktes:

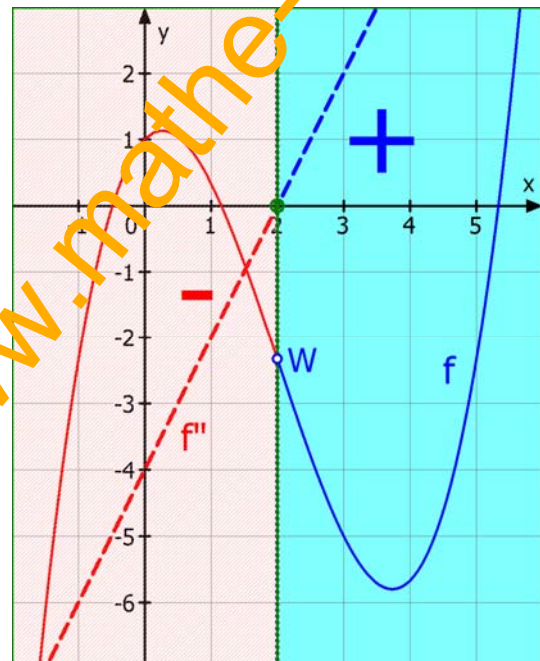
Man nennt $f''(x) = 0 \Rightarrow x_W = \dots$

und $f'''(x_W) \neq 0$.

die **Notwendige Bedingung** für Wendepunkte

die **Hinreichende Bedingung**, denn ist der

Nachweis, dass die f'' -Kurve bei x_W auch wirklich die x-Achse schneidet, also das Vorzeichen wechselt.



Nun folgen Rechenbeispiele!

2 Beispielrechnungen

Beispiel 1

$$f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2$$

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$$

$$f''(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$$

$$f'''(x) = -\frac{3}{2}x$$

Notwendige Bedingung für WP.:

$$f''(x) = 0$$

$$-\frac{3}{4}x^2 + 3 = 0 \quad | \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4 \quad \text{also} \quad x_{1,2} = \pm 2.$$

Hinreichende Bedingung:

Damit untersucht man, welche Steigung die f''' -Kurve in diesen Nullstellen hat.

$$f'''(2) = -3 \neq 0$$

$$f'''(-2) = 3 \neq 0$$

Auswertung:

Wegen $f'''(2) = -3 < 0$ fällt die f''' -Kurve bei $x = 2$.

Das Vorzeichen von f'' wechselt also von + nach -.

Die Krümmung von K (Schaubild von f) ändert sich dort also

von Linkskrümmung nach Rechtskrümmung.

Also hat K bei 2 eine Wendestelle.

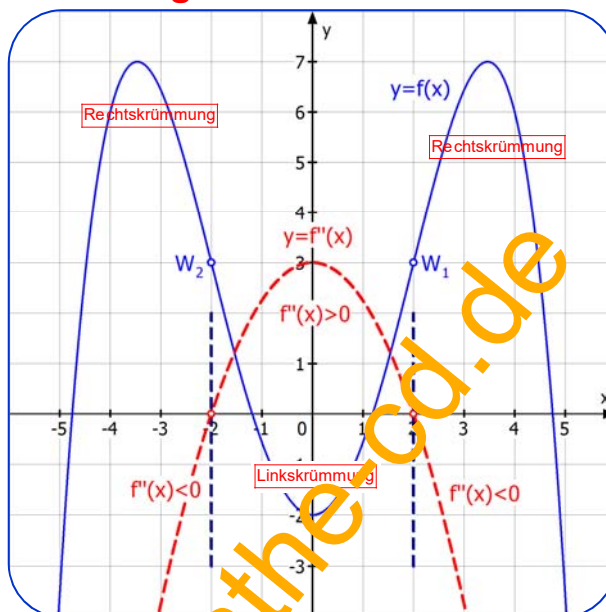
Wegen $f'''(-2) = 3 > 0$ steigt die f''' -Kurve bei $x = -2$.

Das Vorzeichen von f'' wechselt also von - nach +.

Die Krümmung von K (Schaubild von f) ändert sich dort also

von Rechtskrümmung nach Linkskrümmung.

Also hat K bei -2 eine Wendestelle.



y-Koordinaten der Wendepunkte: $f(\pm 2) = -\frac{1}{16} \cdot 16 + \frac{3}{2} \cdot 4 - 2 = -1 + 6 - 2 = 3$

Ergebnis:

K hat die Wendepunkte $W_1(2|3)$ und $W_2(-2|3)$.

Man kann das sehr leicht in der Abbildung nachvollziehen.

Man sieht den Vorzeichenwechsel der gestrichelten f''' -Kurve an den Wendestellen 2 und -2.

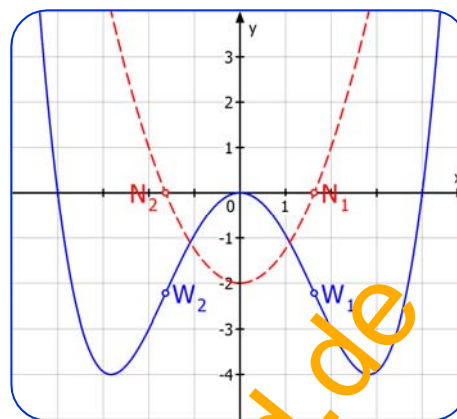
Beispiel 2

$$f(x) = \frac{1}{16}x^4 - x^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2$$

$$f'''(x) = \frac{3}{2}x$$

**Berechnung der Wendepunkte:**

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\frac{3}{4}x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{3}$$

$x_W = \pm\sqrt{\frac{8}{3}} \approx \pm 1,63$ Dort liegt die Nullstelle der f'' -Funktion

Hinreichende Bedingung: $f'''(\pm\sqrt{\frac{8}{3}}) = \pm\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{8}{3}} \neq 0$

Das heißt, dass die f'' -Kurve die x-Achse schräg schneidet, also Vorzeichenwechsel hat.

Damit sind bei $x_W = \pm\sqrt{\frac{8}{3}} \approx \pm 1,633$ Wendepunkte.

y-Koordinaten

$$f\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right) = \frac{1}{16} \cdot \frac{64}{9} - \frac{8}{3} = \frac{4}{9} - \frac{24}{9} = -\frac{20}{9} \approx -2,22$$

Da f nur gerade Exponenten hat, ist das Schaubild symmetrisch zur y-Achse, also gibt es

zwei Wendepunkte: $W_1\left(\pm\sqrt{\frac{8}{3}} \mid -\frac{20}{9}\right) \approx (\pm 1,63 \mid -2,22)$

Beispiel 3

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 3x$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + 3$$

$$f'''(x) = 3x - \frac{9}{2}$$

Wendepunkte:

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + 3 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$3x^2 - 9x + 6 = 0 \quad | : 3$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_W = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Hinreichende Bedingung: $f'''(2) \neq 0$ und $f'''(1) \neq 0$

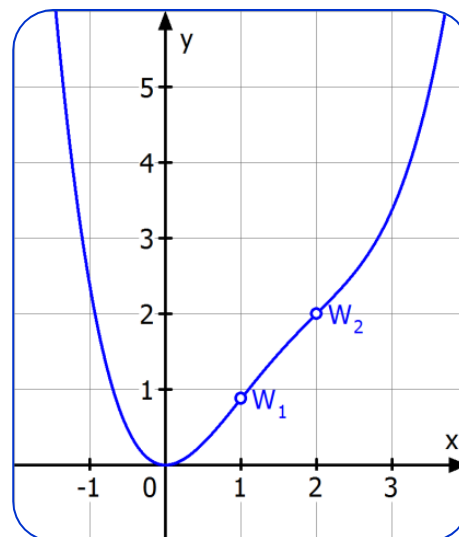
d.h. es liegen Wendestellen vor.

y-Koordinaten:

$$f(1) = \frac{7}{8}, \quad f(2) = 2$$

Ergebnis:

$$W_1\left(1 \mid \frac{7}{8}\right), \quad W_2(2 \mid 2).$$



Beispiel 4

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{4}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$$

$$f''(x) = x^2 - 2x$$

$$f'''(x) = 2x - 2$$

Berechnung der Wendepunkte:**Notwendige Bedingung:**

$$f''(x) = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$1. \text{ Faktor: } x_W = 0$$

$$2. \text{ Faktor: } x_W = 2$$

Hinreichende Bedingung:

$$f'''(0) \neq 0 \text{ und } f'''(2) \neq 0$$

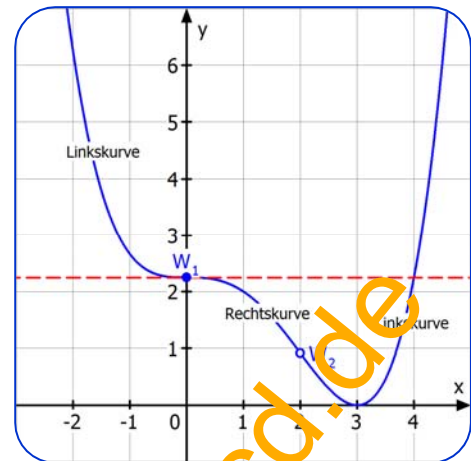
Es gibt also zwei Wendepunkte.

y-Koordinaten:

$$f(0) = \frac{9}{4} \text{ und } f(2) = \frac{16}{12} - \frac{8}{3} + \frac{9}{4} = \frac{16-32+27}{12} = \frac{11}{12}$$

Ergebnis:

$$W_1\left(0 \mid \frac{9}{4}\right) \text{ und } W_2\left(2 \mid \frac{11}{12}\right)$$

**Hinweis: Diese Kurve hat einen Terrassenpunkt.****Einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente nennt man einen Terrassenpunkt.****Und wegen $f'(0) = 0$ hat die Kurve im Wendepunkt eine waagrechte Tangente,****Hinweise:**

Wenn eine Funktion in ihrem Schaubild einen Terrassenpunkt hat, entdeckt man ihn schon bei der Suche nach Extrempunkten also durch die Bedingung $f'(x) = 0$. Die Hinreichende Bedingung ergibt dann nicht $f''(x_E) > 0$ für einen Tiefpunkt oder $f''(x_E) < 0$ für einen Hochpunkt, sondern man erhält überraschenderweise $f''(x_E) = 0$, was darauf hin deutet, dass ein Wendepunkt zu erwarten ist. Das wird dann durch $f'''(x_E) \neq 0$ bestätigt.

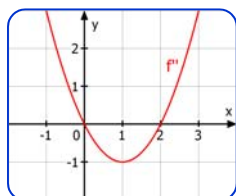
Diese Funktion wird ausführlich im Text 42160 ab Seite 23 untersucht. Sie hat eine weitere Besonderheit: Zur Berechnung der Nullstellen benötigt man Polynomdivision oder Horner Schema.

3 „Künstliche Wendepunkte“ bei zusammengesetzten Funktionen

Wir haben gelernt: Wenn die 2. Ableitungsfunktion an einer Stelle x_W ihr Vorzeichen wechselt, deutet das auf einen Krümmungswechsel der Kurve. Und an dieser Stelle liegt dann ein Wendepunkt.

Es gibt nun prinzipiell zwei verschiedene Arten, das Vorzeichen von f'' zu wechseln:

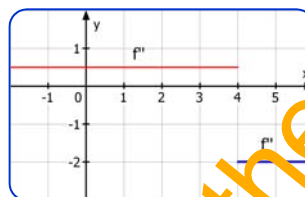
Im Beispiel 4 mit $f''(x) = x^2 - 2x$:



schneidet die f'' -Kurve die x -Achse zweimal: Also wechselt sie bei 0 und 2 das Vorzeichen.

Der Vorzeichenwechsel passiert hier also beim Schnitt mit der x -Achse.

Im kommenden Beispiel 5:



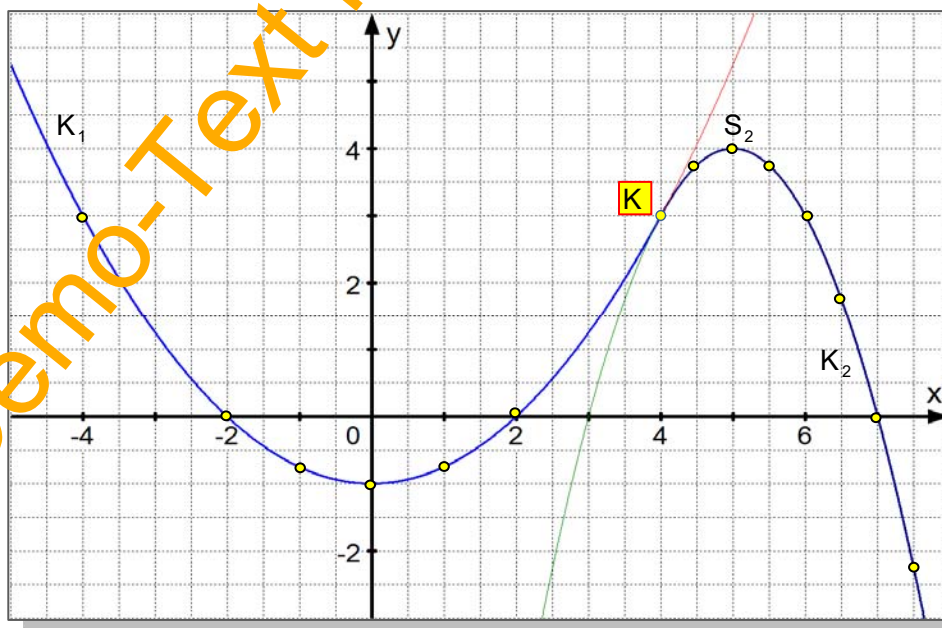
liegt eine zusammengesetzte Funktion vor, die an der Stelle $x = 4$ ihr Vorzeichen dadurch wechselt, dass sie einen Sprung macht.

Hier hat f'' keine Nullstelle. Man muss also den Vorzeichenwechsel anders nachweisen.

Beispiel 5

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - 1 & \text{für } x \leq 4 \\ -x^2 + 10x - 21 & \text{für } x > 4 \end{cases}$$

Das Schaubild besteht also aus zwei an der Stelle 4 in K zusammenstoßenden Parabelbögen.



Die Funktion f ist bei $x = 4$ stetig, denn es gilt:

Annäherung von links gegen 4: $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f_1(x) = f_1(4) = \frac{1}{4} \cdot 16 - 1 = 3$
da f_1 bei 4 stetig ist

Annäherung von rechts gegen 4: $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f_2(x) = f_2(4) = -16 + 40 - 21 = 3$
da f_2 bei 4 stetig ist

Außerdem gilt für den Funktionswert $f(4) = f_1(4) = 3$

Somit stimmen Grenzwerte von links und rechts und Funktionswert überein: f ist stetig bei $x = 4$

Der Punkt K hat also die Koordinaten $K(4 | 3)$.

Es geht nun um die Frage, ob K ein Wendepunkt ist.

Dazu berechnen wir die Ableitungen:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - 1 & \text{für } x \leq 4 \\ -x^2 + 10x - 21 & \text{für } x > 4 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{für } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{für } x > 4 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } x < 4 \\ -2 & \text{für } x > 4 \end{cases}$$

Es fällt auf, dass bei $x = 4$ weder f' noch f'' einen Wert zugeordnet bekommen.

Das kann man nämlich erst tun, wenn man weiß, dass f dort differenzierbar ist.

Steigung bei $x = 4$ von links: $f'_1(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$, Steigung bei $x = 4$: $f'_2(4) = -2 \cdot 4 + 10 = 2$

Also ist f bei $x = 4$ differenzierbar. Daher kann man schreiben:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{für } x \leq 4 \\ -2x + 10 & \text{für } x > 4 \end{cases}$$

Man sieht, dass f'' links von 4 den positiven Wert $\frac{1}{2}$ hat und rechts von 4 den negativen Wert -2 .

Also hat f'' an der Stelle 4 einen Vorzeichenwechsel. Also liegt bei 4 ein Wendepunkt: K ist WP!

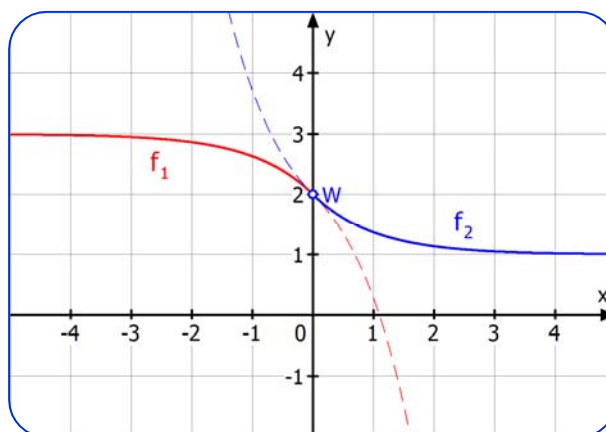
Beispiel 6

$$f(x) = \begin{cases} 3 - e^x & \text{für } x \leq 0 \\ e^{-x} + 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Ist $W(0 | 2)$ ein Wendepunkt?

$$f'(x) = \begin{cases} -e^x & \text{für } x < 0 \\ -e^{-x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{für } x < 0 \\ e^{-x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$



Da e^x und e^{-x} stets positiv sind, ist links von W $f''(x) < 0$ und rechts davon $f''(x) > 0$.

Also hat f'' bei $x = 0$ einen Vorzeichenwechsel.

Ergebnis: $W(0 | 2)$ ist ein Wendepunkt